

**ПИТАННЯ ДО ІСПИТУ З КУРСУ «ВИЩА МАТЕМАТИКА»
ДЛЯ СТУДЕНТІВ ФАКУЛЬТЕТУ КОМП'ЮТЕРНИХ НАУК
І КУРС (І СЕМЕСТР), 2023 Р.**

Тема 1. Матриці, визначники та системи лінійних рівнянь.

1. Матриці. Дії з матрицями. Подібні, симетричні, несиметричні, ортогональні та обернені матриці.
2. Визначники матриці. Властивості та обчислення визначників 2-го та 3-го порядків. Мінори, алгебраїчні доповнення, ранг матриці.
3. Розв'язування систем лінійних рівнянь матричним методом. Правило Крамера, методи Гаусса, Жордана-Гаусса.

Тема 2. Елементи векторної алгебри та теорії лінійних просторів.

4. Поняття вектора. Операції над геометричними векторами. Додавання векторів. Властивості додавання. Добуток вектора на число. Властивості добутка.
5. Означення лінійного векторного простору. Приклади.
6. Лінійні комбінації, лінійна залежність векторів. Необхідні та достатні умови лінійної залежності векторів.
7. Базис лінійного простору. Розмір лінійного простору. Колінеарні та компланарні вектори як приклади відповідно одновимірного та двовимірного лінійного простору.
8. Розклад вектора по базі. Координати вектора. Необхідні та достатні умови колінеарності двох векторів. Необхідні та достатні умови колінеарності двох та компланарності трьох векторів.
9. Ортонормовані бази. Проекція вектора на вісь та півплощину.
10. Скалярний добуток векторів, властивості. Евклідов простір. Довжина (норма) вектора. Приклади.
11. Кут між векторами. Умова ортогональності двох векторів. Нерівність Коши-Буняковского. Проекції вектора. Приклади.
12. Перетворення координат. Матриця переходу. Ортогональні перетворення. Орієнтація базисів, орієнтація простору.
13. Орієнтований об'єм трьох векторів, властивості, запис в координатах. Приклади. Векторний та мішаний добуток векторів, властивості, зв'язок з колінеарністю та компланарністю.
14. Полярна система координат. Формули переходу. (самостійно)
15. Власні числа та вектори матриць, методи їх знаходження. Приклади.

Тема 3. Алгебраїчні лінії першого порядку на площині і в просторі.

16. Пряма на площині, можливі рівняння, взаємне розташування прямих. Поділ відрізка в заданому відношенні (векторний та координатний способи). Пучки прямих. Приклади.
17. Пряма в прямокутній системі координат; нормальне рівняння, відстань від точки до прямої; кут між прямими. Взаємне розміщення прямих на площині. Приклади.
18. Площина у просторі, можливі рівняння, взаємне розташування площин. Пучок площин. Приклади.
19. Площина в прямокутній системі координат, нормальне рівняння, відстань від точки до площини, півпростори, кут між площинами. Приклади.
20. Пряма у просторі, можливі рівняння, взаємне розташування прямих у просторі, відстань від точки до прямої у просторі, відстань між двома мимобіжними прямими. Знаходження спільного перпендикуляра двох мимобіжних прямих. Приклади.
21. Пряма і площина у просторі: взаємне розташування; кут між прямою та площиною. Приклади.

Тема 4. Алгебраїчні лінії другого порядку на площині і в просторі.

22. Еліпс, гіпербола, парабола. Директоріальна властивість еліпса і гіперболи. Полярний параметр. Приклади.
23. Загальне рівняння кривої другого порядку. Перетворення рівняння кривої при перетворенні координат. Приклади.
24. Зведення загального рівняння кривої другого порядку до канонічного виду. Приклади.

Тема 6. Комплексні числа.

25. Алгебраїчна форма комплексних чисел. Рівні, спряжені, протилежні комплексні числа. Дії над комплексними числами. Приклади.
26. Геометрична інтерпретація комплексних чисел. Приклади.
27. Тригонометрична та показникові форми комплексного числа. Формули Ейлера і Муавра. Приклади.
28. Корень n -го степеня з комплексного числа. Приклади.

29. Розв'язування квадратних рівнянь з дійсними коефіцієнтами та комплексною змінною. Приклади.

Тема 7. Границя функції.

30. Відображення. Образи та прообрази множин. Звуження та продовження відображень. Класифікація відображень. Оборотно відображення та відображення, обернені до них. Композиція відображень. Графік відображення. Приклади.

31. Означення околів та проколотих околів точки в $\mathbb{R}$. Ліві та праві півоколи точки в $\mathbb{R}$. Означення послідовності (самостійно). Нескінченно малі та нескінченно великі послідовності. Зв'язок між нескінченно малими та нескінченно великими послідовностями (самостійно).

32. Означення граничної точки числової множини. Загальне означення границі функції за Коші на мові околів. Загальне означення границі функції за Гейне.

33. Теорема про єдиність границі функції. Достатня умова відсутності границі функції. Теорема про арифметичні властивості границь функцій. Приклади.

34. Зв'язок між нескінченно малими та нескінченно великими функціями. Лема про нескінченно малі функції. Приклади.

35. Теорема про граничний перехід у нерівностях та її наслідки. Теорема про три функції. Теорема про границю композиції функцій.

36. Однобічні границі функції в точці. Критерій існування границі функції у двобічній граничній точці на мові однобічних границь. Однобічне прямування функції до своєї границі. Означення монотонних функцій. Теорема Вейерштрасса.

37. Друга чудова границя та її наслідки. Приклади.

38. Перша чудова границя. Нерівності для синуса та тангенса. Приклади.

39. Означення верхньої та нижньої границь функції. Теорема про існування верхньої та нижньої границь функції. Критерій існування границі функції в термінах її верхньої та нижньої границь.

Тема 8. Неперервність функції.

40. Означення неперервної в точці функції. Приклади. Локальні властивості неперервних функцій (теорема про збереження нерівностей, теорема про арифметичні властивості, теорема про композицію для неперервних функцій та лема про збереження знаку функції).

41. Означення неперервної на множині функції. Теорема Вейерштрасса про обмеженість функції, неперервної на відрізку.

42. Класифікація точок розриву. Приклади.

Тема 9. Диференційованість функції, її диференціал і похідна.

43. Означення диференційованої функції в точці. Приклади знаходження похідної для елементарних функцій. Необхідна умова диференційованості функції у точці та приклад, що спростовує її достатність. Однобічні похідні функції та критерій диференційованості в термінах однобічних похідних.

44. Арифметичні властивості диференційованих у точці функцій. Похідна композиції. Похідна оберненої функції. Приклади. Таблиця похідних основних елементарних функцій.

45. Геометричне тлумачення поняття похідної функції. Рівняння дотичної та нормалі до графіка диференційованої функції. Приклади.

46. Похідна функцій, заданих параметрично та в полярних координатах. Приклади.

47. Означення диференціала функції в точці. Зв'язок між диференційованістю функції та існуванням похідної функції в точці. Зв'язок між диференціалом і похідною функції в точці. Арифметичні властивості та властивість інваріантності форми диференціалу функції.

Тема 10. Похідні та диференціали вищих порядків.

48. Означення похідних вищих порядків і класів функцій $C^n(X)$, $C^\infty(X)$. Приклад диференційовної функції, яка не є неперервно диференційовною. Похідні вищих порядків деяких елементарних функцій. Приклади.

49. Правило Лопіталя розкриття невизначеностей типу $\frac{0}{0}$. Приклади.

50. Правило Лопіталя розкриття невизначеностей типу $\frac{\infty}{\infty}$. Приклади.

ПРИКЛАДИ ПРАКТИЧНИХ ЗАВДАНЬ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ:

Тема 1.

РОЗВ'ЯЗАТИ СИСТЕМИ, ВИКОРИСТАТИ БУДЬ-ЯКИЙ З МЕТОДІВ (ГАУССА, КРАМЕРА, ЖОРДАНО-ГАУССА; МАТРИЧНІЙ):

$$1. \begin{cases} x + 4y + 2z = -2 \\ 5x - 2y - 3z = 4 \\ 3x + y - 2z = -5 \end{cases}; 2. \begin{cases} 5x + 2y - 5z = -16 \\ 7x - y - 2z = 9 \\ 2x + y - 3z = -11 \end{cases}$$

Тема 2.

ВЕКТОРИ:

1. Дано точки A, B, C, D: A(2;1;2), B(-3;2;7), C(-4;0;0), D(1;3;-2).

Обчислити:

а) скалярний добуток $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$, кут між ребрами AB й AC;

б) проєкцію вектора $\vec{AB}$ на вектор $\vec{AC}$; в) площину грані ABC; г) об'єм піраміди ABCD;

е) записати розклад вектора $\vec{AB}$ по базису $\{\vec{DA}, \vec{DB}, \vec{DC}\}$.

2. Знайти власні числа та власні вектори лінійного перетворення, що задане матрицею переходу від базису

$$\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\} \text{ до базису } \{\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3'\}, \text{ де } \vec{e}_1' = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3; \vec{e}_2' = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_3; \vec{e}_3' = -2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2.$$

Тема 3, 4.

1. У $\triangle ABC$ з вершинами A(0;7), B(6;-1), C(2;1), записати рівняння сторін, рівняння медіани AM, рівняння та довжину висоти BD, обчислити кути. Зробити малюнок.

2. Знайти точку перетину прямої, що проходить крізь точки $B = (-2, 1, 2)$; $C = (-5, -3, 2)$ з площиною, що проходить крізь точку $A = (4, 0, 0)$, перпендикулярно до вектора $\vec{BC}$. Зробити малюнок.

3. Показати, що дані прямі є мімобіжними та обчислити відстань між ними $L_1: \frac{x+7}{3} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z-4}{3}$;

$L_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y+8}{2} = \frac{z+12}{-1}$. Зробити малюнок.

4. Записати рівняння площини, що проходить крізь точку $M(0,1,2)$ та є паралельною до векторів $\vec{a}_1(2,0,1)$ й $\vec{a}_2(1,1,0)$. Зробити малюнок.

5. Записати канонічне рівняння кривої $x^2 - 4y^2 - 4x + 24y - 36 = 0$. Визначити тип кривої. Визначити її центр, полуосі, ексцентриситет, координати фокусів. Зробити малюнок.

Тема 6.

КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА:

1. Обчислити: $\frac{(1-i)^{31}}{(2\sqrt{3}-i2)^{10}(2i)^{21}}$;

2. Обчислити $\sqrt[3]{8-i8}$; зобразити отримані значення на комплексній площині $\mathbb{C}$.

Тема 7.

ГРАНИЦІ:

1. Обчислення границь за визначенням:

Довести за визначенням, що $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 4x + 8) = 4$.

2. Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 + 27}{x^2 + 2x - 3}; \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2-x}{3+x} \right)^{x-4}; \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 3x}{x^2 - x} + 5^{\frac{3}{x}} \right).$$

Тема 9.

I. ОБЧИСЛИТИ ПОХІДНУ ФУНКЦІЇ

1. $y = \frac{\cos 3x}{(x^2 + 1)^3}$; $y = \arctg(x^3 + 1)^{\frac{1}{4}}$; $y = tg^2(\ln x)$ $y = (\sqrt{1 + 3x})^{\ln x^2}$; $y = (\operatorname{ch} x)^{\operatorname{sh} x}$.

2. Функцію $y = y(x)$ задано неявно рівнянням $F(x, y) = 0$, $y'(x) = ?$:

$$xy + \ln\left(\frac{x}{y}\right) - 2 = 0, y^2 = 2px, \sqrt{x} + \sqrt{y} = a, \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$$

3. Функцію $y = y(x)$ задано параметрично,

$$y = y(x): \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, t \in T$$
$$x = (t^3 - 2t^2 + 3t - 4)e^t, y = (t^3 - 2t^2 + 4t - 4)e^t, 1 < t < +\infty;$$
$$x = \operatorname{ctg} 2t, y = (2 \cos 2t - 1)/(2 \cos t), 0 < t < \pi/2.$$
$$x = e^{-t}, y = t^3, -\infty < t < +\infty;$$

4. Функцію $y = y(x)$ задано у полярних координатах $\rho = \rho(\varphi)$, тобто,

$$y = y(x): \begin{cases} x = \rho(\varphi) \cos \varphi \\ y = \rho(\varphi) \sin \varphi \end{cases}, \varphi \in T$$

$$\rho(\varphi) = a\varphi, \varphi \in \left(\frac{4\pi}{3}; 2\pi\right); \quad \rho(\varphi) = \frac{a}{\varphi}, \varphi \in \left(0; \frac{\pi}{3}\right)$$

II. Записати рівняння дотичної та нормалі до графіку функції у точці x_0 :

1. $f(x) = \frac{2x}{1 + x^2}$, $x_0 = \sqrt{2}$

2. $f(x) = \arctg 2x$, $x_0 = 0$

III. ОБЧИСЛИТИ НАБЛИЖЕННО:

$y = \sin x$, а) $x = 29^\circ$,

$y = \arcsin x$, $x = 0,51$;

$y = \ln \operatorname{tg} x$, $x = 47^\circ 15'$;

ПРИКЛАД ЕКЗАМЕНАЦІЙНОГО БІЛЕТА:

ЕКЗАМЕНАЦІЙНИЙ БІЛЕТ № *

1. Визначники матриці. Властивості та обчислення визначників 2-го та 3-го порядків. Мінори, алгебраїчні доповнення, ранг матриці. Навести приклади. (10 балів)

2. Канонічне рівняння гіперболи (доведення). Властивості гіперболи. Навести приклади. (10 балів)

3. Обчислити $y'(x)$: $y(x) = \frac{\arctg x}{2} - \frac{x}{2(x^2 + 1)}$. (10 балів)

4. Обчислити $\sqrt[4]{2 + i\sqrt{12}}$. Зобразити отримані корені на комплексній площині. (10 балів)

ВИМОГИ:

- ❖ ВСІ ЗАВДАННЯ МАЮТЬ БУТИ ПЕРЕПИСАНІ.
- ❖ ПОРЯДОК ВИКОНАННЯ НЕВАЖЛИВИЙ.
- ❖ ФОРМАТ ВИКОНАНОЇ РОБОТИ - PDF

ЧАС ВИКОНАННЯ 4 ГОДИНИ. ПИСЬМОВО

ОЦІНКА:

№ ЗАВДАННЯ	БАЛИ	ПОЯСНЕННЯ
1,2	10	10 балів – відповідь повна та вірна, наведено приклад. Вірна, тобто присутні повні формули, вірні визначення, повні теореми та твердження (з доведенням, де це вказано у білеті). 9-4 балів – відповідь повна та вірна, не наведено приклад; помилки у формулюванні, або неповністю; відсутнє доведення твердження/теореми або формули, якщо це вказано. 3-1 – вірні формулювання; приклади відсутні
3,4	10	10 балів – завдання виконане вірно; наведено формули, твердження, які було використано під час обчислення (теоретичне пояснення); є малюнок (завдання теми 2, 3,4, 6). 9-7 балів – відповідь має помилки або відповідь записано не в кінцевому вигляді; присутня теоретичне пояснення; відсутність малюнка (завдання теми 2, 3,4, 6). 7-5 балів – завдання в цілому виконане вірно, але відсутнє теоретичне пояснення, відсутність малюнка (завдання теми 2, 3,4, 6). 4-3 – завдання має помилки; відсутнє теоретичне пояснення та малюнок (завдання теми 2, 3,4, 6). 1-3 – завдання не виконане, але виписані необхідні формули/теореми й є малюнок (завдання теми 2, 3,4, 6).
ИТОГО		40

ЛИТЕРАТУРА:

ОСНОВНА

1. Дубовик В.П., Юрик І.І. *Вища математика*. навчальний посібник, К, А.С.К.
2. Басманов О.Є., Кириченко І.К. та інші. Вища математика. Навчальний посібник, Харків, АПБ України, 2003.
3. Вища математика. Підручник. За редакцією Шинкарика М.І. – Тернопіль, вид-во Карп'юка, 2003, 480 с.

ДОПОМІЖНА

1. Дороговцев А.Я., Математичний аналіз, підручник. К. – Либідь. 1993.
2. B.V. Shabat, Introduction to complex analysis. V.1, American Mathematical Society, 1992
3. Комплексний аналіз. Приклади і задачі. (за редакцією В.Г.Самойленка). КНУ ім.Т.Шевченка., 2010.
4. Типові індивідуальні розрахункові завдання з вищої математики. Навч. посібник. За редакцією Шинкарика М.І., Тернопіль, вид-во Карп'юка, 2004.

1.2. – ЗАВАНТАЖЕНО У ГРУПУ.